

Einführung in die Logik - 4

Prädikatenlogik: Lexikon und Syntax

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Prädikatenlogik

Beispiele

- (1) a. **P1:** *Alle KursteilnehmerInnen bestehen die Klausur.*
b. **P2:** *Maria ist eine Kursteilnehmerin.*
c. **C:** *Maria besteht die Klausur.*
- (2) a. **P1:** *Jede(r), der/die die Hausaufgaben macht, besteht die Klausur.*
b. **P2:** *Einige KursteilnehmerInnen machen die Hausaufgaben.*
c. **C:** *Einige KursteilnehmerInnen bestehen die Klausur.*
- (3) a. **P1:** *Kein(e) KursteilnehmerIn vergisst die Hausaufgaben.*
b. **P2:** *Maria ist eine Kursteilnehmerin.*
c. **C:** *Maria vergisst nicht die Hausaufgaben.*

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Prädikatenlogik: Ausdrucksklassen

Prädikate

- x ist_eine_Kursteilnehmerin
 - x besteht_die_Klausur
 - x macht_die_Hausaufgaben
 - x vergisst_die_Hausaufgaben
 - x besteht y
 - x macht y
 - x vergisst y
 - x schenkt y z
- mehrstellige Prädikate werden auch *Relationen* genannt

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Prädikatenlogik: Ausdrucksklassen

Terme/Individuenkonstanten

- Maria
- die Klausur
- das Tutorium
- er/sie/es
- die Hausaufgaben

Quantoren

- alle
- jede/jeder/jedes
- einige
- kein/keine
- niemand

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Prädikatenlogik: Lexikon

Das **Lexikon der Prädikatenlogik** besteht aus

- | | | |
|-----|-------------------------------------|--|
| (1) | Individuenkonstanten | $a, b, c, \dots, j, m, \dots$ |
| (2) | Individuenvariablen | $x, y, z, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots$ |
| (3) | Prädikaten (mit fester Stelligkeit) | $F, G, H, \dots, P, Q, R, \dots$ |
| (4) | den Konnektoren der AL | $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ |
| (5) | Quantoren | $\forall$ (Universal-Q., All-Q.)
$\exists$ (Partikular-Q., Existenz-Q.) |
| (6) | Identitätszeichen | $=$ |
- Individuenkonstanten und Individuenvariablen werden *Terme* genannt.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Prädikatenlogik: Syntax

Die **Syntax** der Prädikatenlogik: wfAs der PL

- Wenn P ein n -stelliges Prädikat ist und $t_1, \dots, t_n$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \dots, t_n)$ ein wfA der PL.
- Wenn A und B wfAs der PL sind, dann sind auch $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ wfAs der PL.
- Wenn A ein wfA der PL ist und x eine Individuenvariable, dann ist auch $\forall x A$ und $\exists x A$ ein wfA der PL.
- Wenn t_1 und t_2 Terme sind, dann ist $t_1 = t_2$ ein wfA der PL.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Übersetzungen natürlich-sprachlicher Sätze in die Sprache der Prädikatenlogik

Peter bewundert Maria.

- Peter $\Rightarrow$ p
- Maria $\Rightarrow$ m
- x bewundert y $\Rightarrow$ B(x, y)
- Peter bewundert Maria. $\Rightarrow$ B(p, m)

Ein Kursteilnehmer bewundert Maria.

- x ist Kursteilnehmer $\Rightarrow$ K(x)
- Ein Kursteilnehmer bewundert Maria.
 $\Rightarrow \exists x (K(x) \wedge B(x, m))$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Übersetzungen natürlich-sprachlicher Sätze in die Sprache der Prädikatenlogik

Kein Kursteilnehmer bewundert Maria.

- $\neg \exists x (K(x) \wedge B(x, m))$

Ein Kursteilnehmer bewundert Maria nicht.

- $\exists x (K(x) \wedge \neg B(x, m))$

Alle Kursteilnehmer bewundern Maria.

Jeder Kursteilnehmer bewundert Maria.

- $\forall x (K(x) \rightarrow B(x, m))$

Nicht alle Kursteilnehmer bewundern Maria.

Nicht jeder Kursteilnehmer bewundert Maria.

- $\neg \forall x (K(x) \rightarrow B(x, m))$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Der Skopus (Geltungsbereich) eines Quantors

$\exists x \text{ F(x)}$	Skopus von $\exists x$
$\exists y \text{ R(x, y) } \wedge F(y)$	Skopus von $\exists y$
$\exists y \text{ (R(x, y) } \wedge F(y))$	Skopus von $\exists y$
$\exists x \forall y (R(x, y) \rightarrow Q(y, x))$	
$\exists x \text{ \forall y (R(x, y) \rightarrow Q(y, x))}$	Skopus von $\exists x$
$\exists x \forall y \text{ (R(x, y) } \rightarrow Q(y, x))$	Skopus von $\forall y$
$\exists x (F(x) \wedge \forall y (G(y) \rightarrow \exists z R(x, y, z)))$	
$\exists x \text{ (F(x) } \wedge \forall y (G(y) \rightarrow \exists z R(x, y, z)))$	Skopus von $\exists x$
$\exists x (F(x) \wedge \forall y \text{ (G(y) } \rightarrow \exists z R(x, y, z))})$	Skopus von $\forall y$
$\exists x (F(x) \wedge \forall y (G(y) \rightarrow \exists z \text{ R(x, y, z)}))$	Skopus von $\exists z$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Skopus-relevante Definitionen

gebundene und freie Variablen

- Das Vorkommen einer Variable x ist **gebunden**, wenn x im Skopus eines Quantors $\forall x$ oder $\exists x$ auftritt. Eine Variable ist **frei**, wenn sie nicht gebunden ist.

Aussagen der PL

- Ein wfA der PL, der keine freien Variablen enthält, ist eine Aussage der PL.
 - a.: Proposition, geschlossener Ausdruck, geschlossene Formel
- Ein wfA der PL mit mindestens einer freien Variable wird propositionale Funktion genannt.
 - a.: offener Ausdruck, offene Formel

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Skopus-Ambiguitäten

Quantorenskopus ist eine notorische Quelle von Mehrdeutigkeiten:

- *Jede Studentin der Computerlinguistik muss bis zur Zwischenprüfung ein Buch über Parsing gelesen haben.*
 - $\forall x \exists y (CLS(x) \rightarrow BUCHP(y) \wedge MUSS_LESEN(x, y))$
 - $\exists y \forall x (CLS(x) \rightarrow BUCHP(y) \wedge MUSS_LESEN(x, y))$
- *Alle Studierenden haben nicht zugehört.*
- *Hans glaubt, dass eine der Teilnehmerinnen gewinnen wird.*

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Übung zur Prädikatenlogik: Definition logisch-semantischer Relationen

Definieren Sie mit Hilfe der Prädikatenlogik die folgenden logisch-semantischen Relationen (s. Foliensatz 01 'Intro'):

- Synonymie
- Hyponymie, Hyperonymie
- Antonymie
- Komplementarität
- Konversen

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Vorteile der Übersetzung von NL-Ausdrücken in den Formalismus der PL

- berechenbare Verfahren zur
 - Semantikkonstruktion
 - semantischen Auswertung (Deduktion)
- strukturell eindeutige semantische Repräsentationen
- präzise denotationelle (modelltheoretische) Semantik

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Recap Prädikatenlogik
Prof. Dr. Anette Frank
Formale Semantik, WS 2014/15

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Prädikatenlogik – Syntax

- **Nichtlogische Ausdrücke:**
 - Individuenkonstanten: CON
 - n -stellige Relationskonstanten (Prädikate): $PRED^n$, für alle $n \geq 0$
- **Unendliche Menge von Individuenvariablen:** VAR
- **Terme:** $TERM = VAR \cup CON$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Prädikatenlogik – Syntax

- **Atomare Formeln:**
 - $R(t_1, \dots, t_n)$ für $R \in PRED^n$ und $t_1, \dots, t_n \in TERM$
 - $t_1 = t_2$ für $t_1, t_2 \in TERM$
- **Wohlgeformte Formeln:** die kleinste Menge WFF sodaß
 - alle atomaren Formeln sind WFFs
 - wenn φ und ψ WFF sind, dann auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$
 - wenn $x \in VAR$, und φ ist WFF, dann sind $\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ WFFs

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Skopus

- Wenn $\forall x\varphi$ ($\exists x\varphi$) eine Teilformel einer Formel ψ ist, dann ist φ der **Skopus** dieses Auftretens von $\forall x$ ($\exists x$) in ψ .
- Wir müssen verschiedene Auftreten von Quantoren unterscheiden, weil es Formeln gibt wie $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$.
- Beispiele:
 - $\exists x (\forall y (T(y) \leftrightarrow x=y) \wedge F(x))$
 - $\forall x (A(x) \wedge \forall x B(x))$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Freie und gebundene Variablen

- Ein Vorkommen einer Variable x in einer Formel φ ist **frei in φ** , wenn dieses Vorkommen von x nicht in den Skopus eines Quantors $\forall x$ oder $\exists x$ in φ fällt.
- Wenn $\forall x\psi$ ($\exists x\psi$) eine Teilformel von φ ist und x frei ist in ψ , dann ist dieses Vorkommen von x von diesem Vorkommen des Quantors $\forall x$ ($\exists x$) gebunden.
- Beispiele:
 - $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ – x kommt in $B(x)$ gebunden vor
 - $\forall x A(x) \wedge B(x)$ – x kommt in $B(x)$ frei vor
- Ein **Satz** ist eine Formel ohne freie Variablen.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

- Johann ist ein Student
 - $\text{student}(j^*)$
- Johann liest ein interessantes Buch
 - $\exists x((\text{buch}(x) \wedge \text{interessant}(x)) \wedge \text{lesen}(j^*, x))$
- Johann liest jedes interessante Buch
 - $\forall x((\text{buch}(x) \wedge \text{interessant}(x)) \rightarrow \text{lesen}(j^*, x))$
- Nicht alle Studenten haben bestanden
 - $\neg \forall x(\text{student}(x) \rightarrow \text{bestehen}(x))$
- Nur Johann ist durchgefallen
 - $\forall x(\text{durchgefallen}(x) \leftrightarrow x = j^*)$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

- Genau ein Student ist durchgefallen
 - $\exists x(\forall y(\text{student}(y) \leftrightarrow y = x) \wedge \text{durchgefallen}(x))$
- Bill ist genervt, wenn jemand lärmt
 - $\exists x(\text{lärmen}(x)) \rightarrow \text{genervt}(b^*)$
- Niemand hat jede Frage beantwortet
 - $\neg \exists x(\forall y(\text{frage}(y) \rightarrow \text{beantworten}(x, y)))$
- Wale sind Säugetiere
 - $\forall x(\text{wal}(x) \rightarrow \text{säugetier}(x))$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg